Kapitel 9

Vektoralgebra

Verständnisfragen

Sachfragen

1. Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen Punkten und Vektoren!
2. Wie ist die Vektoraddition definiert?
3. Wie ist die Differenz zweier Vektoren definiert?
4. Wie ist die Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl definiert?
5. Erläutern Sie die Koordinaten eines Vektors in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$!
6. Wie sind Vektoraddition und Multiplikation mit einem Skalar in Koordinaten definiert?
7. Welche Rechenregeln für die Vektorarithmetik kennen Sie?
8. Wie ist die Addition zwischen einem Punkt und einem Vektor definiert?
9. Wie lautet die Parameterdarstellung einer Geraden?
10. Wie lautet die Parameterdarstellung einer Ebene?
11. Wie lautet die implizite Darstellung einer Geraden im $\mathbb{R}^2$?
12. Wie hängen implizite Darstellung und Parameterdarstellung einer Geraden zusammen?
13. Wie lautet die implizite Darstellung einer Ebene im $\mathbb{R}^3$?
14. Wie hängen implizite Darstellung und Parameterdarstellung einer Ebene zusammen?
15. Wie können schiefe Achsen in einem Koordinatensystem definiert werden?
16. Wie lautet die Definition des Skalarprodukts im $\mathbb{R}^n$?
17. Nennen Sie Rechenregeln des Skalarprodukts!
18. Wie ist die Norm eines Vektors definiert? Welche Eigenschaften hat die Norm?
19. Wie ist der Abstand zweier Punkte definiert? Welche Eigenschaft hat der Abstand zweier Punkte?

20. Wie lautet die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung?
21. Wann sind zwei Vektoren im $\mathbb{R}^n$ orthogonal?
22. Wie lautet der Satz von Pythagoras im $\mathbb{R}^n$?
23. Was ist ein Normalenvektor auf einer Geraden im $\mathbb{R}^n$?
24. Erläutern Sie die Orthogonalprojektion eines Vektors auf einen gegebenen Vektor $\mathbf{v}$!
25. Wie kann der Abstand zwischen einem Punkt und einer Geraden bestimmt werden?
26. Wie ist das Vektorprodukt definiert?
27. Nennen Sie Rechenregeln für das Vektorprodukt!
28. Wie lautet die Rechte-Hand-Regel?
29. Kann das Vektorprodukt geometrisch interpretiert werden?
30. Wie lautet die Definition des Spatprodukts?
31. Kann das Spatprodukt geometrisch interpretiert werden?
32. Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen Vektoren, Punkten und Matrizen!
33. Formulieren Sie das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ mit Hilfe von Matrixarithmetik!

Methodenfragen

1. Mit Vektoren rechnen können.
2. Mit Geraden und Ebenen in impliziter Darstellung und Parameterdarstellung arbeiten können!
3. Zwischen impliziter Darstellung und Parameterdarstellung umrechnen können!
4. Koordinaten eines Punkts in einer Ebene bestimmen können.
5. Skalarprodukt berechnen können.
6. Den Winkel zwischen zwei Vektoren berechnen können.
7. Überprüfen können, ob zwei Vektoren orthogonal sind.
8. Die Orthogonalprojektion eines Vektors berechnen können.
9. Abstand zwischen einem Punkt und Gerade oder Ebene berechnen können.
10. Vektorprodukt berechnen können.
11. Flächeninhalte mit Hilfe des Vektorprodukts berechnen können.
12. Spatprodukt berechnen können.
13. Volumen mit Hilfe des Spatprodukts berechnen können.
14. Feststellen können, ob zwei Geraden im $\mathbb{R}^3$ windschief sind.
15. Matrixarithmetik auf Vektoren anwenden können, insbesondere $A\mathbf{x}$ für eine Matrix A und einen Vektor $\mathbf{x}$ berechnen können.

Übungsaufgaben

1. Gegeben sind die drei Vektoren $\mathbf{u} = (-3, 1, 2)$, $\mathbf{v} = (4, 0, -8)$, $\mathbf{w} = (6, -1, -4)$. Bestimmen Sie die Komponenten von $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $6\mathbf{u} + 2\mathbf{w}$, $-\mathbf{v} + \mathbf{u}$, $(2\mathbf{u} - 7\mathbf{w}) - (8\mathbf{w} + \mathbf{v})$. Bestimmen Sie den Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ mit $2\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{x} = 7\mathbf{x} + \mathbf{w}$.

   Lösung:
   $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (-7, 1, 10)$, $6\mathbf{u} + 2\mathbf{w} = (-6, 4, 4)$, $-\mathbf{v} + \mathbf{u} = (-7, 1, 10)$, $(2\mathbf{u} - 7\mathbf{w}) - (8\mathbf{w} + \mathbf{v}) = (-100, 17, 72)$.

   $\mathbf{x} = \frac{1}{3}(-8, 1, 8)$.

2. Beweisen Sie, dass es keine Skalare $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gibt mit $\lambda_1(-2, 9, 6) + \lambda_2(-3, 2, 1) + \lambda_3(1, 7, 5) = (0, 5, 4)$.

   Lösung:
   Die Gleichung entspricht einem linearen Gleichungssystem

   $$\begin{aligned} -2\lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3 &= 0, \\ 9\lambda_1 + 2\lambda_2 + 7\lambda_3 &= 5, \\ 6\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 &= 4. \end{aligned}$$

   Durch Gauß-Elimination können Sie nachweisen, dass dieses lineare Gleichungssystem keine Lösung besitzt.

3. Beweisen Sie, dass bei der Definition der Vektorarithmetik die reellen durch komplexe Komponenten ersetzt werden dürfen, wenn die für $\mathbb{R}^n$ definierten Operationen übernommen werden. Der dadurch entstehende Vektorraum heißt $\mathbb{C}^n$.

   Lösung:
   Dass die geforderten Rechengesetze erfüllt sind liegt daran, dass auch $\mathbb{C}$ ein Körper ist. Also kann man an Stelle von $\mathbb{R}$ einen Körper, beispielsweise $\mathbb{Z}_2$ oder $\mathbb{Z}_p$ für eine Primzahl $p \in \mathbb{Z}$ verwenden.

4. Beweisen Sie $G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = G'(\mathbf{u}', \mathbf{v}') \Leftrightarrow ((G \cap G' \neq \emptyset) \wedge (\exists\, \mu \in \mathbb{R}\ \mathbf{v}' = \mu\mathbf{v})$.

   Lösung:
   $\Rightarrow$: es gibt Skalare mit $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \lambda\mathbf{v}'$, $\mathbf{u}' = \mathbf{u} + \mu\mathbf{v}$.

   $\Leftarrow$: Es gibt genau einen Punkt im Schnitt, nennen wir den $\mathbf{x}$, zusammen mit der Gleichheit der Richtungsvektoren folgt die Behauptung.

5. Bestimmen Sie die Parameterdarstellung der Ebene, die die Punkte $(-4, -1, -1)$, $(-2, 0, 1)$ und $(-1, -2, 3)$ enthält!

   Lösung:
   $E(\lambda, \mu) = (-4, -1, -1)^T + \lambda(2, 1, 0)^T + \mu(3, -1, 2)^T$.

6. Zeigen Sie, dass die Geraden $G(P, \mathbf{v})$ und $G'(P', \mathbf{v}')$ mit $P = (3, 4, 1)$, $\mathbf{v} = (-2, 1, -1)$, $P' = (5, 1, 7)$ und $\mathbf{v}' = (2, -1, 1)$ parallel sind!

   Lösung:
   Es ist $\mathbf{v} = -\mathbf{v}'$. Die Richtung ist entgegengesetzt; aber die Geraden sind parallel.

7. Beweisen Sie die Äquivalenz der Parameterdarstellung und der impliziten Darstellung einer Ebene!

Lösung:
Die implizite Darstellung einer Ebene ist gegeben durch die Gleichung

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Die Parameterform ist gegeben durch den Punkt P und die beiden linear unabhängigen Richtungsvektoren $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ mit

$$P + \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Zuerst der Übergang von einer impliziten zur Parameterdarstellung: Mindestens eine der Zahlen a, b oder c müssen ungleich Null sein. Es wird angenommen, dass $a \neq 0$.

Dann setzen wir $y = z = 0$ und lösen nach a auf:

$$ax + d = 0 \Rightarrow x = -\frac{d}{a}.$$

Dann kann als Punkt P auf der Ebene $P = (-\frac{d}{a}, 0, 0)$ verwendet werden. Ist $a = 0$, wird einfach nach einer der anderen Koordinaten aufgelöst.

Dann muss jeder Punkt

$$(-\frac{d}{a}, 0, 0) + \lambda(v_x, v_y, v_z) + \mu(w_x, w_y, w_z)$$

ein Element der Ebene sein, also die Gleichung $ax + by + cz + d = 0$ erfüllen:

$$a \cdot (-\frac{d}{a} + \lambda v_x + \mu w_x) + b\lambda v_y + b\mu w_y + c\lambda v_z + c\mu w_z + d = 0.$$

Zusammengefasst nach λ und μ:

$$\lambda(av_x + bv_y + cv_z) + \mu(aw_x + bw_y + cw_z) = 0.$$

Diese Gleichung muss für alle λ und μ erfüllt sein. Für $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$ ergibt sich

$$v_x = \frac{-bv_y - cv_z}{a}.$$

Aus $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$ ergibt sich

$$w_w = \frac{-bw_y - cw_z}{a}.$$

v_y und v_z sind frei wählbar, also beispielsweise

$$v_z = 1, v_y = 0 : v_x = -\frac{c}{a}$$

und

$$w_y = 1, w_z = 0 : w_x = -\frac{b}{a}.$$

Insgesamt ist die Parameterform im Fall $a \neq 0$ durch

$$P = (-\frac{d}{a}, 0, 0), \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

gegeben.

Ist die Parameterform einer Ebene durch

$$P + \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

gegeben, dann sind die Koeffizienten der Gleichung

$$ax + by + cz + d = 0$$

gesucht. Das Vektorprodukt $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ steht senkrecht auf der Ebene, damit ist die Normale $\mathbf{n}$ und die Koeffizienten a, b und c gegeben. d erhalten Sie durch Einsetzen des Ursprungs in die Gleichung $\langle \mathbf{n}, \mathbf{XP} \rangle = 0$.

8. Berechnen Sie die Skalarprodukte $\langle (3, 1, 4, -5), (2, 2, -4, -3) \rangle$ und $\langle (-1, 1, 0, 4, -3), (-2, -2, 0, 2, 1) \rangle$.

   Lösung:
   Es ist $\langle (3, 1, 4, -5), (2, 2, -4, -3) \rangle = 7$ und $\langle (-1, 1, 0, 4, -3), (-2, -2, 0, 2, 1) \rangle = 5$.

9. Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\mathbf{u} = (2, 1, 3)$ und $\mathbf{v} = (1, 7, \lambda)$ orthogonal?

   Lösung:
   Damit die beiden Vektoren orthogonal sind muss $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ sein. Daraus können Sie eine Gleichung für λ aufstellen; es ist $\lambda = -3$.

10. Weisen Sie die Gleichung $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2$ nach. Warum trägt sie die Bezeichnung *Parallelogrammgleichung*?

    Lösung:
    Die Aussage lässt sich durch Nachrechnen beweisen; Sie müssen einfach die Definition der Norm durch das Skalarprodukt verwenden.

    $\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y}$ bilden die Diagonalen im von $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ aufgespannten Parallelogramm.

11. Weisen Sie nach, dass die Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ orthogonal sind. Welche geometrische Interpretation hat diese Aussage?

    Lösung:
    Es ist $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 0 \Leftrightarrow 4 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

    $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ und $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ stellen die Diagonalen in einem Rechteck dar!

12. Bestimmen Sie für $\mathbf{x} = (3, 2, -1)$, $\mathbf{y} = (2, 6, 7)$ die Vektoren $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} - 2\mathbf{x})$, $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) - 2\mathbf{y}$.

    Lösung:
    $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (20, -23, 14)$, $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} - 2\mathbf{x}) = (20, -23, 14)$ und $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) - 2\mathbf{y} = (16, -35, 0)$

13. Bestimmen Sie einen Vektor, der auf $(-6, 4, 2)$, $(3, 1, 5)$ oder $(-2, 1, 5)$, $(3, 0, -3)$ senkrecht steht!

    Lösung:
    Wenn Sie das Vektorprodukt bilden erhält man einen zu den Argumenten orthogonalen Vektor.

    Für $(-6, 4, 2) \times (3, 1, 5)$ erhält man $(18, 36, -18)$;

    für $(-2, 1, 5) \times (3, 0, -3)$ das Ergebnis $(-3, 9, -3)$.

14. Vereinfachen Sie den Ausdruck $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} - \mathbf{v})$!

    Lösung:
    $2\mathbf{v} \times \mathbf{u}$

15. Beweisen Sie, dass für den von den Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ eingeschlossenen Winkel $\tan(\theta) = \frac{\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}$ gilt!

Lösung:
Im Buch finden Sie die Ausdrücke für Sinus und Kosinus von θ; wenn Sie diese dividieren erhalten Sie das Ergebnis.

16. Bestimmen Sie die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten $(2,2,0)$, $(-1,2,2)$ und $(0,4,3)$!

    Lösung:
    Mit Satz 9.14 folgt $\frac{\sqrt{77}}{2}$.

17. Beschreiben Sie die Schnittbildung zwischen drei Ebenen im $\mathbb{R}^3$! Welche Lösungen erhalten Sie für die Beispiele $x_1 + x_3 - 1 = 0$, $x_3 - 1 = 0$, $x_2 - 2 = 0$ und $x_1 = 0$, $x_1 + x_3 = 0$, $x_3 = 0$?

    Lösung:
    Sind die Ebenen in impliziter Darstellung gegeben, dann müssen alle Punkte im Schnitt der drei Ebenen liegen. Ist $a_i x_1 + b_i x_2 + c_i x_3 + d_i = 0$ die implizite Darstellung der Ebene E_i, dann muss $Q = (q_1, q_2, q_3)$ aus dem Schnitt. drei lineare Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} a_1 q_1 + b_1 q_2 + c_1 q_3 &= -d_1, \\ a_2 q_1 + b_2 q_2 + c_2 q_3 &= -d_2, \\ a_3 q_1 + b_3 q_2 + c_3 q_3 &= -d_3. \end{aligned}$$

    Ob sich die drei Ebenen in einem Punkt schneiden, oder ob der Schnitt durch eine Gerade oder Ebene gegeben ist kann jetzt am Lösungsverhalten des linearen Gleichungssystems abgelesen werden.

    Für das Beispiel $x_1 + x_3 - 1 = 0$, $x_3 - 1 = 0$, $x_2 - 2 = 0$ ist das lineare Gleichungsystem gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

    Mit Hilfe der Gauss-Elimination erhalten Sie eine eindeutige Lösung. Das bedeutet, dass der Punkt $Q = (0,2,1)$ der Schnittpunkt der Geraden ist.

    Für das Beispiel $x_1 = 0$, $x_1 + x_3 = 0$, $x_3 = 0$ ist $\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_3$, die Normalenvektoren sind also komplanar. Bei der Lösung des linearen Gleichungssystems können Sie x_2 frei wählen; die drei Ebenen schneiden sich in der Gerade $G(0, (0,1,0))$.

18. Welchen Abstand haben die Geraden $G_1((0,0,0),(1,0,0))$ und $G_2((3,4,1),(-2,1,-1))$?

    Lösung:
    Ob zwei gegebene Geraden windschief sind oder sich in einem Punkt schneiden kann mit Hilfe des Spatprodukts entschieden werden. Das Spatprodukt der Vektoren $(3,4,1)$, $(1,0,0)$ und $(-2,1,-1)$ ist 5; also sind die Geraden windschief.

    Die beiden Punkte $X_1 \in G_1$, $X_2 \in G_2$ können durch ein lineares Gleichungssystem bestimmt werden. Es ist $X_1 = P_1 + \lambda_1 \mathbf{v}_1$, $X_2 = P_2 + \lambda_2 \mathbf{v}_2$. Die Verbindung zwischen X_1 und X_2 muss auf beiden Geraden senkrecht stehen, darauf erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P_1 P_2}, \mathbf{v}_1 \rangle &= \lambda_1 \|\mathbf{v}_1\|^2 - \lambda_2 \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle, \\ \langle \mathbf{P_1 P_2}, \mathbf{v}_2 \rangle &= \lambda_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle - \lambda_2 \|\mathbf{v}_2\|^2. \end{aligned}$$

    Für das Beispiel konkret

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 &= 3, \\ -2\lambda - 1 - 6\lambda_2 &= -3. \end{aligned}$$

    Daraus ergibt sich die Lösung $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = \frac{3}{2}$ und $X_1 = (6,0,0)$, $X_2 = (6, \frac{5}{2}, \frac{5}{2})$.

19. Formulieren Sie die Gauß-Elimination und die LU-Zerlegung aus Kapitel 5 mit Hilfe des euklidischen Skalarprodukts. Schreiben Sie eine Funktion, die das Skalarprodukt realisiert, oder verwenden Sie die `BLAS`, wenn sie Ihnen zur Verfügung steht. Bauen Sie das euklidische Skalarprodukt in Ihre Implementierung der LU-Zerlegung ein!

Lösung:
Die Rückwärtssubstitution war gegeben durch

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} x_k \right), i = n, n-1, \ldots, 1.$$

Die darin auftretende Summe ist interpretierbar als Skalarprodukt im $\mathbb{R}^{n-i}$ zwischem dem entsprechenden Teil des Zeilenvektors und den bisher berechneten Lösungskomponenten.

Die BLAS finden Sie beispielsweise auf *www.netlib.org* und als Teil des bereits verwendeten Java-Pakets *Ninja*. Das Skalarprodukt ist realisiert als `Blas.ddot`. Die entsprechenden Ausschnitte der Vektoren und Matrizen können Sie in *Ninja* durch die `section`-Funktion angeben. Dadurch ergibt sich der folgende Source-Code für die Rückwärtssubstitution:

```
private static void backSubstitution(doubleArray2D A, doubleArray1D b)
{
  // Rücksubstitution für eine gegebene obere Dreiecksmatrix
  // und eine rechte Seite. Das Ergebnis steht anschließend auf der
  // übergebenen rechten Seite!

  // Verwendet die BLAS-Routine ddot und die section-Klassenfunktionen
  // von doubleArray2D und doubleArray1D

  int i, j, n = b.size();

  // Erstes Lösungselement ohne Skalarprodukt
  b.set(n-1, b.get(n-1)/A.get(n-1, n-1));

  for (i=n-2; i>=0; i--) {
       b.set(i,(b.get(i) - Blas.ddot(b.section(new Range(i+1,n-1)),
                A.section(i, new Range(i+1,n-1))))/A.get(i,i));
  }
}
```

Der Rest des Programms verläuft analog wie auf Seite 44.

Für die komplette *LU*-Zerlegung benötigen wir eine entsprechende Vorwärtssubstitution und die eigentliche Zerlegung durch die Gauß-Elimination.

Zuerst zur Vorwärtssubstitution. Dabei wird implizit eingebaut, dass die Diagonalelemente der unteren Dreiecksmatrix nach erfolgter *LU*-Zerlegung alle 1 sind. Dann ist die Vorwärtssubstitution gegeben durch

$$x_1 = b_1, x_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} x_k, i = 2, \ldots, n.$$

Die Summe entspricht einem Skalarprodukt zwischen der ersten $i-1$ Elementen der i-ten Zeile und den bisher berechneten $i-1$ Elementen der Lösung. Dies kann wiederum durch die Funktion `Blas.ddot` mit der `section`-Funktion realisiert werden:

```
// Vorwärtssubstitution für eine gegebene untere Dreiecksmatrix
// und eine rechte Seite. Das Ergebnis steht anschließend auf der
// übergebenen rechten Seite! Im Feld p steht eine eventuell
// durchgeführte Zeilenvertauschung.
```

```
  //
  // Die Diagonale von A ist 1; diese Funktion gehört zur LU-Zerlegung!
  private static void forwardSubstitution(doubleArray2D A, doubleArray1D b,
                                          intArray1D p)
  {
    int i, j, n = b.size();
    double h;

    // Zeilenvertauschung in der rechten Seite
    for (i=0; i<n-1; i++) {
        if (p.get(i) != i) {
           h = b.get(i);
           b.set(i, b.get(p.get(i)));
           b.set(p.get(i),h);
        }
    }

    // Jetzt die Vorwärts-Substitution;
    // das erste Element bleibt unverändert,
    // die Diagonalelemente sind alle 1!
    for (i=1; i<n; i++) {
        b.set(i,b.get(i)-
                Blas.ddot(b.section(new Range(0,i-1)),
                          A.section(i,new Range(0,i-1))));
    }
  }
```

Nun zur *LU*-Zerlegung. Neben dem Skalarprodukt gibt es in der BLAS eine ganze Reihe von Funktionen, die Sie sehr gewinnbringend einsetzen können. Und Sie können erwarten, dass diese Bibliothek häufig in einer optimierten Form vorliegen.

Bei der Spaltenpivot-Wahl mit Scheinskalierung werden die Absolutbeträge der Zeilenelemente der Matrix berechnet. Dazu gibt es in der BLAS die Funktion `Blas.dasum`. Damit können wir den Teil

```
summe = 0.0;
for (j=k; j<n; j++) {
   summe += Math.abs(A.get(i,j));
}
// Spaltenpivotsuche mit Scheinskalierung
q = Math.abs(A.get(i,k))/summe;
if (q > max) {
   max = q;
   p.set(k, i);
}
```

durch die Zeile

```
// Spaltenpivotsuche mit Scheinskalierung
q = Math.abs(A.get(i,k))/Blas.dasum(A.section(i, new Range(k,n-1)));
if (q > max) {
    max = q;
    p.set(k, i);
}
```

ersetzen.

Die Blas-Bibliothek enthält auch eine Funktion zum Vertauschen der Elemente zweier Vektoren, `Blas.dswap`. Dann kann die Zeilenvertauschung in der Pivotsuche

```
// Vertauschen der Zeilen, falls erforderlich
if (p.get(k) != k) {
    for (j=0; j<n; j++) {
        h = A.get(k, j);
        A.set(k, j, A.get(p.get(k),j));
        A.set(p.get(k), j, h);
    }
}
```

durch die Zeile

```
if (p.get(k) != k) {
    Blas.dswap(A.section(k, new Range(0,n-1)),
               A.section(p.get(k), new Range(0,n-1)));
}
```

ersetzt werden.

Im Eliminationsschritt finden Sie die Zeile

$$a_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{ip_j}}{a_{p_j p_j}} a_{p_j k}$$

Dies kann durch `Blas.daxpy` realisiert werden. Diese Funktion berechnet $\mathbf{y} = \mathbf{y} + \alpha \mathbf{x}$ für zwei Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$. Statt

```
// Elimination
for (i=k+1; i<n; i++) {
    A.set(i, k, A.get(i,k)/A.get(k,k));
    for (j=k+1; j<n; j++)
       A.set(i, j, A.get(i,j)-A.get(i,k)*A.get(k,j));
}
```

kann man

```
// Elimination
for (i=k+1; i<n; i++) {
   A.set(i, k, A.get(i,k)/A.get(k,k));
   Blas.daxpy(-A.get(i,k),A.section(k, new Range(k+1, n-1)),
                          A. section(i, new Range(k+1, n-1)));
}
```

verwenden.