

# Mathematik für Informatiker

Eine Einführung an praktischen Beispielen aus der Welt  
der Computer

Manfred Brill

2. Auflage

# Kapitel 5

## Lineare Gleichungssysteme und Determinanten

### Motivation

Die Lösung von linearen Gleichungssystemen ist die vielleicht am häufigsten durchgeführte Aufgabe auf dem Computer. Es gibt Schätzungen, die pro Tag von Tausenden Gleichungssystemen ausgehen. Determinanten ordnen einer Matrix eine Zahl zu; und sie bieten eine Grundlage für die Berechnung von Eigensystemen einer Matrix.

### 5.1 Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme kennen Sie sicher aus Ihrer Schulzeit. In diesem Kapitel wird ein systematisches Vorgehen zur Lösung solcher Gleichungssysteme entwickelt, das insbesondere auf dem Computer realisierbar ist. Damit können dann nicht nur „kleine“ Systeme mit einigen wenigen Unbekannten, sondern auch Systeme mit Tausenden von Gleichungen und Unbekannten gelöst werden.

- Die beiden Funktionen  $x_2 = x_1 + 1$  und  $x_2 = -x_1 + 3$  haben einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt, wie Sie in Abbildung 5.1 erkennen können. Dieser Schnittpunkt  $(x_1, x_2)$  muss die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 3 \\ -x_1 + x_2 &= 1\end{aligned}$$

erfüllen. Die eindeutig bestimmte Lösung ist  $x_1 = 1, x_2 = 2$ ; wovon Sie sich auf der einen Seite durch Einsetzen dieser Werte in die Gleichungen und andererseits durch einen Blick auf die Graphen in Abbildung 5.1 überzeugen können.

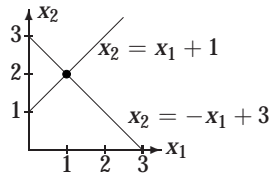


Abbildung 5.1: Der Schnittpunkt der beiden Funktionen  $x_2 = x_1 + 1$  und  $x_2 = -x_1 + 3$

**Definition 5.1** Eine Gleichung der Form  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$  mit den Unbekannten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  und den gegebenen reellen Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  und  $b$  heißt lineare Gleichung. Die Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  heißen Koeffizienten.  $m$  lineare Gleichungen für  $n$  Unbekannte  $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n &= b_i \\ \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

werden lineares Gleichungssystem mit  $m$  Gleichungen und  $n$  Unbekannten genannt. Jedes Tupel  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , das alle  $m$  lineare Gleichungen erfüllt, heißt Lösung des linearen Gleichungssystems.

- Die drei Gleichungen für zwei Unbekannte

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 &= 5 \\ x_1 + 3x_2 &= 4 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 1 \end{aligned}$$

stellen ein lineares Gleichungssystem dar. Durch Auflösen der ersten Gleichung nach  $x_2$  ergibt sich  $x_2 = 5 - 4x_1$ . Einsetzen in zweite Gleichung ergibt  $x_1 = 1, x_2 = 1$ . Wenn Sie diese Werte in die dritte Gleichung einsetzen, ergibt sich der Widerspruch  $7 = 1$ . Es gibt keine drei Zahlen, die alle drei Gleichungen lösen. Das Gleichungssystem ist *inkonsistent*.

- Ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten ist

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Wenn Sie die erste Gleichung nach  $x_1$  auflösen und in die beiden anderen Gleichungen einsetzen, dann erhalten Sie die beiden linearen Gleichungen  $-x_2 - x_3 = 1$  und  $x_2 + x_3 = -1$ . Das System hat eine Lösung, die jedoch nicht eindeutig ist. Für jede Auswahl von  $x_2$  erhalten Sie einen Wert für  $x_3$  und  $x_1$ , also insgesamt unendlich viele verschiedene Lösungen.

Wichtig ist die Position der Unbekannten. Das Wesentliche in den  $m$  Gleichungen mit  $n$  Unbekannten steht also in der *erweiterten*  $m \times (n + 1)$ -Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

□ Für das lineare Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 8 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

ist die erweiterte Koeffizientenmatrix gegeben durch  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ .

□ Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 &= 12 \\ 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 15 \\ x_3 - 2x_4 &= 7 \\ 5x_4 &= -10 \end{aligned}$$

hat die erweiterte Koeffizientenmatrix  $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 & 12 \\ 0 & 4 & -3 & 2 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -10 \end{pmatrix}$ .

Ein solches lineares Gleichungssystem kann „von unten nach oben“ aufgelöst werden. Der Wert für  $x_4$  ergibt sich durch die letzte Gleichung als  $x_4 = -2$ . Dann kann die vorletzte Gleichung nach  $x_3$  aufgelöst werden mit  $x_3 = 7 + 2x_4 = 7 - 4 = 3$ . Analog sind  $x_2 = 7$  und  $x_1 = 1$ .

**Definition 5.2** Eine  $m \times n$ -Matrix  $A = (a_{ij})$  heißt obere Dreiecksmatrix, wenn für die Elemente  $\forall i > j$   $a_{ij} = 0$  erfüllt ist. Ist  $\forall i < j$   $a_{ij} = 0$ , dann wird  $A$  untere Dreiecksmatrix genannt.

$A$  heißt Stufenmatrix mit der Stufenzahl  $r$ , wenn es Spaltenindices  $k(1), k(2), \dots, k(r)$  gibt, sodass  $a_{1k(1)} \neq 0, \dots, a_{rk(r)} \neq 0$  ist und  $a_{ij} = 0$  wenn  $i \leq r$  und  $j < k(r)$  oder  $i > r$  und  $j$  beliebig sind.

In einer *oberen* Dreiecksmatrix enthält das Dreieck oberhalb der Diagonalen und die Diagonale selbst Einträge ungleich der Null. Unterhalb der Diagonalen stehen nur Nullen. In einer Stufenmatrix können Sie oberhalb des Bereichs, in dem die Nullen stehen, Treppenstufen einzeichnen, daher der Name.

□ Die Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$  ist eine obere Dreiecksmatrix.

□ Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist eine Stufenmatrix mit Stufenanzahl  $r = 3$ . Dabei ist  $k(1) = 2$ ,  $k(2) = 4$  und  $k(3) = 6$ .

**Definition 5.3** Ein lineares Gleichungssystem mit  $m$  Gleichungen und  $n$  Unbekannten, dessen Koeffizienten eine obere Dreiecksmatrix bilden, heißt gestaffeltes lineares Gleichungssystem. Gestaffelte lineare Gleichungssysteme, deren Diagonalelemente alle ungleich Null sind, werden sukzessiv durch Rückwärtssubstitution gelöst:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{k=i+1}^n a_{ik} x_k \right), \quad i = n, n-1, \dots, 1.$$

Treten bei der Rückwärtssubstitution freie Variable auf, werden diesen Parameter zugewiesen und die Lösung in Abhängigkeit von diesen Parametern angegeben.

□ Das gestaffelte Gleichungssystem mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 & 12 \\ 0 & 4 & -3 & 2 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -10 \end{pmatrix}$$

kann durch Rückwärtssubstitution gelöst werden:  $x_4 = \frac{1}{5}(-10 - 0) = -2$ ,  $x_3 = \frac{1}{1}(7 - (-2)(-2)) = 3$ ,  $x_2 = \frac{1}{4}(15 - ((-3)3 + 2(-2))) = 7$ ,  $x_1 = \frac{1}{2}(12 - (3 \cdot 7 + (-1)3 + 4(-2))) = 1$ .

□ Bei der Rückwärtssubstitution des gestaffelten linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ x_3 + x_4 &= 2 \\ x_4 &= 1 \end{aligned}$$

tritt ein freier Parameter auf. Es ist  $x_4 = 1$  und  $x_3 = 2 - x_4 = 1$ . In der letzten Gleichung der Rückwärtssubstitution wird  $x_2 = \lambda$  gesetzt und  $x_1$  abhängig von  $\lambda$  bestimmt als  $x_1 = 4 - \lambda - 1 - 1 = 2 - \lambda$ .

Eine Idee wäre jetzt, die erweiterte Koeffizientenmatrix eines gegebenen Systems so umzuformen, bis ein gestaffeltes System vorliegt, das die gleichen Lösungen besitzt. Dafür kommen nur äquivalente Umformungen in Frage, die immer rückgängig gemacht werden können. Als *elementare Zeilenumformungen* werden nur drei Operationen zugelassen:

- Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile der erweiterten Koeffizientenmatrix,
- Multiplikation einer Zeile mit einer reellen Zahl  $\lambda \neq 0$ ,

■ Vertauschen von zwei Zeilen.

□ Die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

soll zu einer Koeffizientenmatrix eines gestaffelten Systems umgeformt werden. Also müssen durch die zugelassenen elementaren Zeilenumformungen die Elemente  $a_{21}$ ,  $a_{31}$  und  $a_{32}$  eliminiert werden. Durch Subtrahieren der ersten von der dritten Zeile wird  $a_{31} = 0$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Subtraktion der ersten Zeile von der mit dem Faktor 2 multiplizierten zweiten Zeile ergibt  $a_{21} = 0$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & -3 & -14 \\ 0 & -2 & -3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Das Element  $a_{32}$  kann jetzt nur eliminiert werden, indem ein geeignetes Vielfaches der zweiten zur dritten Zeile addiert wird. Die erste Zeile kann offensichtlich nicht verwendet werden, sonst würde  $a_{31}$  wieder ungleich Null. Multiplikation der dritten Zeile mit 5 und Addition des Zweifachen der zweiten Zeile führen zum Ziel:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & -21 & -63 \end{pmatrix}.$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat die gleichen Lösungen wie das Ausgangssystem. Die Rückwärtssubstitution ergibt

$$x_3 = \frac{-63}{-21} = 3, x_2 = \frac{1}{5}(-14 + 9) = -1, x_1 = \frac{1}{2}(8 - 1 - 3) = 2.$$

#### Gauß-Elimination

Schritt 1: Bestimmen Sie die am weitesten links stehende Spalte, die von Null verschiedene Werte enthält.

Schritt 2: Ist die oberste Zahl der in Schritt 1 gefundenen Spalte eine Null, dann vertauschen Sie die erste Zeile mit einer geeigneten anderen Zeile.

Schritt 3: Ist  $\alpha$  das erste Element der in Schritt 1 gefundenen Spalte, dann dividieren Sie die erste Zeile durch  $\alpha$ , um eine führende Eins zu erzeugen.

Schritt 4: Addieren Sie passende Vielfache der ersten Zeile zu den übrigen Zeilen, um unterhalb der führenden Eins Nullen zu erzeugen.

Schritt 5: Wenden Sie die ersten vier Schritte auf den Teil der Matrix an, der durch Streichen der ersten Zeile entsteht, und wiederholen Sie dieses Verfahren, bis die erweiterte Koeffizientenmatrix eines gestaffelten Systems erhalten wird.

Schritt 6: Lösen Sie das gestaffelte System durch Rückwärtssubstitution.

□ Die Gauß-Elimination für die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

verläuft folgendermaßen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Rückwärtssubstitution ergibt die Lösung  $x_1 = 22$ ,  $x_2 = 17$ ,  $x_3 = 12$  und  $x_4 = 6$ .

Für ein  $4 \times 4$ -Gleichungssystem ist die erweiterte Koeffizientenmatrix gegeben durch die Matrix

$$(A|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_4 \end{pmatrix}$$

Im ersten Schritt der Gauß-Elimination werden die Elemente  $a_{21}$ ,  $a_{31}$  und  $a_{41}$  eliminiert. Falls  $a_{11} \neq 0$  ist, gilt nach diesem Schritt

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}, \quad b_i^{(1)} = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} b_1$$

für  $i, j = 2, 3, 4$ . Die erweiterte Koeffizientenmatrix hat dann die Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} & b_1 \\ 0 & a_{32} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} & b_1 \\ 0 & a_{42} & a_{43}^{(1)} & a_{44}^{(1)} & b_4 \end{pmatrix}.$$

Im nächsten Schritt werden,  $a_{22}^{(1)} \neq 0$  vorausgesetzt die Elemente  $a_{32}^{(1)}$ ,  $a_{42}^{(1)}$  eliminiert durch

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{2j}^{(1)}, \quad b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} b_2^{(1)}$$

für  $i, j = 3$  und  $i, j = 4$ . Ist  $a_{33}^{(2)} \neq 0$ , dann ist

$$a_{44}^{(3)} = a_{44}^{(2)} - \frac{a_{43}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} a_{3j}^{(2)}, \quad b_4^{(3)} = b_4^{(2)} - \frac{a_{43}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} b_3^{(2)}.$$

Dies kann auf ein beliebiges  $n \times n$ -Gleichungssystem verallgemeinert werden. Vorausgesetzt, alle auftretenden Diagonale-Elemente sind ungleich Null, dann

kann die Gauß-Elimination für die erweiterte Koeffizientenmatrix als

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{kj}^{(k-1)}, i, j = k + 1, \dots, n;$$

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} b_k^{(k-1)}, i = k + 1, \dots, n$$

beschrieben werden. Dabei läuft  $k$  von 1 bis  $n - 1$ .

## 5.2 Die Matrixdarstellung der Gauß-Elimination

Die Umformungen, die bei der Gauß-Elimination auftreten, können durch Multiplikation mit einfachen Matrizen beschrieben werden. Die so entstehende Produktdarstellung ist die Basis der Realisierung der Gauß-Elimination auf dem Computer.

Die rechte Seite eines linearen Gleichungssystems mit  $m$  Gleichungen und  $n$  Unbekannten kann als  $m \times 1$  Matrix  $\mathbf{b}$  aufgefasst werden. Analog ist der Lösungsvektor eine  $n \times 1$  Matrix  $\mathbf{x}$ . Dann kann ein lineares Gleichungssystem mit Hilfe der Matrixmultiplikation als  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  formuliert werden. Matrizen mit einer Spalte oder einer Zeile werden mit fett gedruckten Buchstaben geschrieben, um auf diese Besonderheit hinzuweisen.

**Definition 5.4** Eine quadratische Matrix heißt Elementarmatrix, wenn sie durch eine einzige Elementaroperation aus der Einheitsmatrix hervorgeht.

- Die Multiplikation der zweiten Zeile von  $I_2$  mit  $-3$  ergibt die Elementarmatrix  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ .
- Vertauschen der zweiten und vierten Zeile von  $I_4$  produziert die Elementarmatrix  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
- Durch die Addition des Dreifachen der dritten Zeile von  $I_3$  zur ersten Zeile entsteht die Elementarmatrix  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Satz 5.1** Ist  $A$  eine beliebige  $m \times n$ -Matrix und  $E$  eine Elementarmatrix, dann ist  $EA$  gleich der Matrix, die durch Anwenden derselben Elementaroperation auf  $A$  entsteht, die aus der Einheitsmatrix die Elementarmatrix  $E$  macht.

- Die Matrix  $A$  soll durch

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben sein. Als Beispiele von Elementaroperationen werden jene betrachtet, die  $A$  auf obere Dreiecksform umformen. Das Element  $a_{21}$  wird aus der zweiten Zeile durch Addition des  $(-2)$ -fachen der ersten Zeile zur zweiten Zeile

eliminiert, was der Elementarmatrix

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entspricht. Um  $a_{31}$  zu eliminieren, wird die erste Zeile zur dritten Zeile addiert. Dies entspricht der Elementarmatrix

$$E_{31} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das Endergebnis der Gauß-Elimination ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrixmultiplikation  $E_{31}E_{21}A$  führt zum gleichen Endergebnis, wovon Sie sich durch Nachrechnen überzeugen sollten. Es fehlt noch die Elimination von  $a_{32}$ . Die Subtraktion der zweiten von der dritten Zeile führt diese durch, was der Elementarmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

entspricht. Auch hier stimmt das Ergebnis der Elementaroperation mit dem Matrixprodukt überein, was Sie wiederum nachrechnen sollten!

Dieser Satz ist von keinem großen praktischen Nutzen. Für die Berechnung von Lösungen linearer Gleichungssysteme ist es sinnvoller, die Elementaroperation explizit auszuführen statt mit den entsprechenden Elementarmatrizen zu multiplizieren. Für die theoretische Entwicklung von Aussagen über Matrizen und lineare Gleichungssysteme ist diese Darstellung aber von unschätzbarem Wert!

Bereits bei der Einführung der Elementaroperationen wurde darauf geachtet, dass die Umformungen bei der Gauß-Elimination die Lösung nicht verändern dürfen. Solche äquivalenten Umformungen müssen also immer umkehrbar sein, was bei den verwendeten Elementaroperationen einsichtig ist. Die Division einer Zeile durch eine Zahl  $\neq 0$  kann durch eine Multiplikation rückgängig gemacht werden. Auch das Vertauschen von zwei Zeilen ist leicht rückgängig zu machen. Die Addition des  $c$ -fachen der  $i$ -ten Zeile zur Zeile  $j$  kann durch Addition des  $(-c)$ -fachen der  $i$ -ten Zeile zur  $j$ -ten Zeile rückgängig gemacht werden.

- Durch Multiplikation der zweiten Zeile von  $I_2$  mit 7 erhalten wir die Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ . Das Ergebnis der Division der zweiten Zeile mit 7 ist wieder  $I_2$ .

**Satz 5.2** Jede Elementarmatrix ist invertierbar, ihre Inverse ist eine Elementarmatrix.

**Beweis:**

Ist  $E$  eine Elementarmatrix, dann geht sie aus  $I$  durch eine Elementaroperation hervor. Ist  $E_0$  die Elementarmatrix zur entsprechenden inversen Elementaroperation, dann folgt  $E_0E = I = EE_0$ . ■

Der folgende Satz hat weitreichende Konsequenzen, er charakterisiert die Invertierbarkeit einer quadratischen Matrix mit Hilfe der eben eingeführten Elementarmatrizen und wird dabei helfen, Aussagen über lineare Gleichungssysteme zu machen.

**Satz 5.3** Für eine  $n \times n$ -Matrix  $A$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- $A$  ist invertierbar.
- Das homogene lineare Gleichungssystem  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  hat nur die triviale Lösung  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .
- $A$  kann durch Elementaroperationen in die Einheitsmatrix umgeformt werden.
- $A$  lässt sich als Produkt von Elementarmatrizen darstellen.

**Beweis:**

Statt die Äquivalenz der Aussagen paarweise nachzuweisen, was viel zu aufwändig wäre, wird ein so genannter „Ringschluss“  $a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow d) \Rightarrow a)$  durchgeführt. Damit ist auch die paarweise Äquivalenz bewiesen.

$a) \Rightarrow b)$ : Angenommen,  $\mathbf{x}_0$  ist eine Lösung des homogenen Gleichungssystems. Dann ist  $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ . Daraus folgt  $A^{-1}A\mathbf{x}_0 = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$ , und  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ .

$b) \Rightarrow c)$ : Wenn das homogene Gleichungssystem nur die triviale Lösung besitzt, dann hat die Gauß-Elimination ein gestaffeltes Gleichungssystem  $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$  zum Ergebnis.  $A$  kann also durch Elementaroperationen auf  $I$  überführt werden.

$c) \Rightarrow d)$ : Es gibt Elementarmatrizen  $E_1, E_2, \dots, E_k$  mit der Eigenschaft  $E_k E_{k-1} \cdots E_1 A = I$ . Elementarmatrizen sind invertierbar; beide Seiten dieser Gleichung können von links mit  $E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$  multipliziert werden:  $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$ .

Aus d) folgt a), denn Elementarmatrizen sind invertierbar und das Produkt von invertierbaren Matrizen ist invertierbar. ■

Bei der Durchführung der Gauß-Elimination treten ausschließlich untere Dreiecksmatrizen auf. Dies liegt daran, dass immer versucht werden muss, Zeilen, die sich bereits in Stufenform befinden, nicht zu verändern. Es werden nur Einträge unterhalb der Diagonalen verändert.

Ein Gleichungssystem kann eine eindeutige Lösung besitzen; aber bereits bei den ersten Beispielen gab es auch Beispiele von Gleichungssystemen ohne Lösung. Es stellt sich die Frage, wie das allgemeine Lösungsverhalten eines linearen Gleichungssystems aussehen kann.

**Satz 5.4** Ein lineares Gleichungssystem hat entweder keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen.

**Beweis:**

Sie haben bereits Beispiele für Gleichungssysteme kennen gelernt, die diese drei Alternativen realisierten. Es bleibt nachzuweisen, dass es im Fall von nicht eindeutigen Lösungen immer unendlich viele Lösungen gibt. Sind  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2$  zwei

verschiedene Lösungen von  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , dann ist  $\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$  und  $A\mathbf{y} = A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 - A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$ . Für ein beliebiges  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist  $\mathbf{x}_1 + \lambda\mathbf{x}_2$  ebenfalls eine Lösung der linearen Gleichungssysteme. Es gibt überabzählbar viele Lösungen, wenn Sie mindestens zwei gefunden haben. ■

Eine invertierbare Matrix  $A$  kann als Produkt von Elementarmatrizen dargestellt werden. Diese Tatsache kann jetzt für die Herleitung eines Verfahrens zur Berechnung der inversen Matrix verwendet werden. Im Beweis war  $A = E_1^{-1}E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}I$ . Invertieren beider Seiten ergibt  $A^{-1} = E_kE_{k-1} \cdots E_2E_1I$ . Also liegen zwei Gleichungen vor,  $E_kE_{k-1} \cdots E_2E_1A = I$  und  $A^{-1} = E_kE_{k-1} \cdots E_2E_1I$ . Jede dieser Multiplikationen entspricht einer Elementaroperation. Wenn Sie die Folge von Elementaroperationen, die benötigt werden, um aus  $A$  die Einheitsmatrix  $I$  zu machen, auf  $I$  anwenden, dann ist das Ergebnis  $A^{-1}$ .

### Gauß-Jordan-Algorithmus

Die Inverse einer invertierbaren Matrix  $A$  wird berechnet, indem man eine Folge von Elementaroperationen bestimmt, die  $A$  zur Einheitsmatrix umformt, und diese Folge auf  $I$  anwendet.

Bei der Durchführung des Gauß-Jordan-Algorithmus wird die  $n \times n$ -Matrix  $A$  und  $I_n$  in eine  $n \times 2n$ -Matrix  $(A|I_n)$  geschrieben. Jede Elementaroperation für die Überführung von  $A$  auf  $I_n$  wird auf der gesamten Matrix ausgeführt, bis man bei  $(I_n|A^{-1})$  angelangt ist. Bricht die Gauß-Elimination vorher mit einer Nullzeile ab, dann ist  $A$  nicht invertierbar.

- Mit Hilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus soll die Inverse von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

berechnet werden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Die inverse Matrix ist  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ .

Mit Hilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus zur Invertierung einer Matrix gibt es jetzt einen neuen Lösungsansatz für die Lösung von linearen Gleichungssystemen.

**Satz 5.5** Jedes lineare Gleichungssystem  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  mit einer invertierbaren Matrix  $A$  hat für jede rechte Seite  $\mathbf{b}$  die eindeutig bestimmte Lösung  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ .

**Beweis:**

Dass  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$  eine Lösung des Gleichungssystems darstellt, ist klar. Angenommen, es gibt eine weitere Lösung  $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$ . Dann ist  $\mathbf{x}_0 = A^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{x}$ . ■

□ Für das Gleichungssystem mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix}$$

wurde  $A^{-1}$  bereits bestimmt. Mit  $A^{-1}\mathbf{b}$  ist die Lösung gegeben durch  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

In Satz 5.3 wurden bereits vier äquivalente Aussagen über invertierbare Matrizen und die Lösbarkeit des dazu gehörenden homogenen Gleichungssystems aufgestellt. Jetzt kommen zwei weitere Aussagen hinzu.

**Satz 5.6** Für eine  $n \times n$ -Matrix  $A$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- $A$  ist invertierbar.
- Das homogene lineare Gleichungssystem  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  hat nur die triviale Lösung  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .
- $A$  kann durch Elementaroperationen in die Einheitsmatrix  $I_n$  überführt werden.
- $A$  lässt sich als Produkt von Elementarmatrizen darstellen.
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  ist für jede rechte Seite  $\mathbf{b}$  lösbar.
- Für alle rechten Seiten  $\mathbf{b}$  hat das lineare Gleichungssystem  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  genau eine Lösung.

**Beweis:**

Die Äquivalenz der Aussagen a) bis d) ist bereits bewiesen, es muss nur noch a)  $\Rightarrow$  f)  $\Rightarrow$  e)  $\Rightarrow$  a) nachgewiesen werden.

Dass aus a) die Aussage f) folgt, wurde in Satz 5.5 bewiesen; aus f) folgt immer e), denn wenn es genau eine Lösung gibt, dann ist das Gleichungssystem auf jeden Fall lösbar. Bleibt also zu zeigen, dass die Implikation e)  $\Rightarrow$  a) wahr ist.

Wenn  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  für alle rechten Seiten lösbar ist, dann gilt dies auf jeden Fall für die linearen Gleichungssysteme

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sind die Lösungen dieser  $n$  Gleichungssysteme  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ , dann ist  $A(\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_n) = (A\mathbf{x}_1 \ A\mathbf{x}_2 \ \dots \ A\mathbf{x}_n) = I_n$ . ■

### 5.3 Die LU-Zerlegung

Das vorgestellte Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen ist zwar auf dem Computer realisierbar. Aber häufig tritt der Fall auf, dass für die gleiche Koeffizientenmatrix viele rechte Seiten auftreten. Eine Alternative ist hier der Gauß-Jordan-Algorithmus, der  $A^{-1}$  berechnet. Dann lässt sich mit  $A^{-1}\mathbf{b}$  schnell eine Lösung bestimmen. Aber die Berechnung von  $A^{-1}$  ist durch Rundungsfehler auf dem Computer fehlerbehaftet, sodass dies keine gute Methode darstellt. Ein anderer Ansatz wäre, die bei der Elimination von  $A$  durchgeführten Elementaroperationen in geeigneter Form zu speichern und für die Lösung mit einer neuen rechten Seite wieder abzurufen. Dafür gibt es die LU-Zerlegung, in der die Matrix  $A$  als Produkt von zwei Matrizen als  $A = LU$  dargestellt wird. Das Problem kann in zwei Schritten bearbeitet werden. Zuerst wird davon ausgegangen, dass  $A$  wie beschrieben faktorisiert werden kann und ein Algorithmus formuliert wird, der die Lösung des linearen Gleichungssystems berechnet. In einem zweiten Schritt wird die Faktorisierung  $A = LU$  konstruiert. Abschließend werden noch einige Überlegungen über den praktischen Einsatz des Verfahrens angestellt.

**Satz 5.7** *Ist  $A$  eine reguläre  $n \times n$ -Matrix, die sich als Produkt  $A = LU$  einer unteren  $n \times n$ -Dreiecksmatrix und einer oberen  $n \times n$ -Dreiecksmatrix darstellen lässt, dann kann das Gleichungssystem  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  durch die folgenden Schritte aufgelöst werden:*

1. Definiere die  $n \times 1$ -Matrix  $\mathbf{y}$  durch  $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ .
2. Setze die Definition von  $\mathbf{y}$  in das faktorisierte Gleichungssystem aus Schritt 1 ein und löse das gestaffelte Gleichungssystem  $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$  nach  $\mathbf{y}$  auf.
3. Setze  $\mathbf{y}$  in  $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$  ein und löse nach  $\mathbf{x}$  auf.

**Beweis:**

Die Matrix  $L$  ist invertierbar, also ist  $\mathbf{y} = L^{-1}\mathbf{b}$ . Die Lösung des gestaffelten Gleichungssystems  $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$  löst auch das ursprüngliche Gleichungssystem:  $U\mathbf{x} = \mathbf{y} \Leftrightarrow U\mathbf{x} = L^{-1}\mathbf{b} \Leftrightarrow LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . ■

□ Gegeben ist das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Durch Matrixmultiplikation können Sie nachrechnen, dass die Koeffizientenmatrix wie hier angegeben als Produkt  $LU$  dargestellt werden kann:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zuerst muss das gestaffelte Gleichungssystem  $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$  gelöst werden. Vorwärtssubstitution für

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ergibt die Lösung  $y_1 = 1, y_2 = 5, y_3 = 2$ . Das gestaffelte Gleichungssystem  $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ , also hat

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

die Lösung  $x_1 = 2, x_2 = -1$  und  $x_3 = 2$ .

Ist eine LU-Zerlegung der Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems bekannt, dann können schnell und effizient die Lösungen für viele rechte Seiten berechnet werden. Für jede rechte Seite  $\mathbf{b}$  müssen zwei gestaffelte Gleichungssysteme aufgelöst werden.

Wie kann für eine Koeffizientenmatrix  $A$  eine LU-Zerlegung gefunden werden? Dass sie existiert, lässt sich leicht beweisen. In  $L$  und  $U$  werden die Elementaroperationen der Gauß-Elimination gespeichert, daraus ergeben sich die gesuchten Matrizen.

**Satz 5.8** *Ist  $A$  eine  $n \times n$ -Matrix, für die die Gauß-Elimination ohne Vertauschung von Zeilen durchgeführt werden kann. Dann besitzt  $A$  die Faktorisierung  $A = LU$ ,  $L$  ist eine untere Dreiecksmatrix,  $U$  ist eine Stufenmatrix, deren Diagonalelemente alle 1 sind.*

**Beweis:**

Die Anwendung der Gauß-Elimination auf eine Matrix  $A$  entspricht der Multiplikation mit Elementarmatrizen. Es gibt also Elementarmatrizen  $E_1, E_2, \dots, E_k$  mit  $E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = U$ .  $U$  ist eine Matrix in Stufenform und die gesuchte Matrix  $U$  für die Zerlegung. Die Elementarmatrizen für die Gauß-Elimination waren alle Matrizen von Stufenform; und die Multiplikation von Matrizen in Stufenform erhält diese Eigenschaft. Elementarmatrizen sind invertierbar. Auch die Inversen von unteren Dreiecksmatrizen sind wieder untere Dreiecksmatrizen. Das Produkt von unteren Dreiecksmatrizen ergibt wieder untere Dreiecksmatrizen,  $L = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1}$  ergibt die gesuchte Darstellung. ■

Der Beweis des Satzes gibt ein Konstruktionsverfahren für eine LU-Zerlegung an, allerdings ist dies nicht praktikabel. Auf die Multiplikation der Elementarmatrizen und den dazugehörigen Speicherplatz kann verzichtet werden:

#### LU-Zerlegung ohne Zeilenvertauschungen

Schritt 1: Reduzieren Sie  $A$  ohne Zeilenvertauschung auf Stufenform  $U$  und speichern Sie die Multiplikatoren, die die führenden Einsen und die Nullen unterhalb der Diagonale erzeugen.

Schritt 2: Belegen Sie die Diagonale von  $L$  mit den Kehrwerten der Multiplikatoren, die an der entsprechenden Position in  $U$  eine führende Eins geliefert haben.

Schritt 3: Schreiben Sie unter die Hauptdiagonalen die negativen Werte der Multiplikatoren, die zur Elimination der entsprechenden Position in  $U$  benutzt wurden.

Bei der beschriebenen  $LU$ -Zerlegung wird vorausgesetzt, dass die Elimination von  $A$  ohne Zeilenvertauschungen durchführbar ist, also bleiben nur zwei mögliche Elementaroperationen übrig. Die Diagonalelemente von  $L$  sind alle 1 und müssen nicht explizit gespeichert werden.

Bleibt die Frage zu beantworten, ob jede reguläre Matrix  $A$  eine  $LU$ -Zerlegung besitzt. Während der Gauß-Elimination werden Zeilenvertauschungen durchgeführt, um eine Null, durch die dividiert würde, durch ein von Null verschiedenes Element zu ersetzen. Dies gelingt immer, wenn die Matrix  $A$  in Stufenform zu bringen ist.

**Satz 5.9** *Ist  $A$  eine  $m \times n$ -Matrix, die durch Gauß-Elimination in Stufenform überführt werden kann, besitzt  $A$  die Faktorisierung  $PA = LU$ . Dabei ist  $L$  eine untere Dreiecksmatrix,  $U$  ist eine Stufenmatrix, deren Diagonalelemente alle 1 sind.  $P$  ist eine Matrix, die durch Zeilenvertauschungen aus  $I_n$  hervorgegangen ist.*

**Beweis:**

Wird die Gauß-Elimination für  $A$  mit Zeilenvertauschungen durchgeführt, dann ergeben sich die Vertauschungsmatrizen  $P_{i(1)1}, P_{i(2)2}, \dots, P_{i(r)r}$  mit  $i(k) \geq k$ , dabei ist  $P_{ii} = I$ . Als Matrix  $P$  wird  $P = P_{i(r)r} P_{i(r-1)r-1} \cdots P_{i(2)2} P_{i(1)1}$  definiert. Die Matrix  $PA$  kann durch Gauß-Elimination ohne Zeilenvertauschungen auf Stufenform gebracht werden; sie besitzt eine  $LU$ -Zerlegung mit der Stufenmatrix  $U'$ . Aus dieser Stufenmatrix ergibt sich die gesuchte Matrix  $U$  durch Vertauschen folgender Elemente:

Das 2. und das  $i(2)$ -te Element der ersten Spalte, dann das 3. und das  $i(3)$ -te Element der ersten beiden Spalten und so weiter, bis schließlich in der ersten bis  $(r-1)$ -ten Spalte jeweils das  $r$ -te und  $i(r)$ -te Element vertauscht sind. ■

Die Vertauschung von Zeilen muss abschließend in unserem Algorithmus zur Lösung von linearen Gleichungssystemen mit Hilfe der  $LU$ -Zerlegung berücksichtigt werden.

**Auflösung bei  $LU$ -Zerlegung mit Zeilenvertauschung**

Schritt 1: Definieren Sie die  $n \times 1$ -Matrix  $\mathbf{y}$  durch  $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ .

Schritt 2: Setzen Sie die Definition von  $\mathbf{y}$  in das faktorisierte Gleichungssystem aus Schritt 1 ein und löse das gestaffelte Gleichungssystem  $L\mathbf{y} = P\mathbf{b}$  nach  $\mathbf{y}$  auf.

Schritt 3: Setzen Sie  $\mathbf{y}$  in  $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$  ein und lösen Sie nach  $\mathbf{x}$  auf.

Bei der Durchführung der Gauß-Elimination taucht das Problem auf, dass der Pivot bestimmt werden muss. Der Begriff „Pivot“ stammt aus dem Englischen und bedeutet „Dreh- und Angelpunkt“. Bei der Gauß-Elimination wird im Fall von  $a_{11} = 0$  die Zeile 1 mit einer Zeile vertauscht, für die  $a_{i1} \neq 0$  gilt. Theoretisch ist es egal, welche Zeile  $i$  mit dieser Eigenschaft ausgewählt wird. Mit Hilfe des Pivots werden alle Elemente in der ersten Spalte ab der zweiten Zeile eliminiert; durch Subtraktion des  $\frac{a_{j1}}{a_{i1}}$ -fachen der Zeile  $i$  von allen Zeilen darunter.

Aus Gründen der Stabilität empfiehlt es sich, nicht irgendein  $a_{j1}$  zu benutzen. Die Wahl  $|a_{j1}| = \max_j |a_{j1}|$  hat sich in der Praxis bewährt; man wählt unter allen in Betracht kommenden Elementen das betragsgrößte aus. Diese Strategie heißt *Spaltenpivotsuche*. Die Vertauschung der Zeilen beeinflusst nicht die Reihenfolge der Unbekannten im Vektor  $\mathbf{x}$ . Nur bei der folgenden Rücksubstitution muss in den rechten Seiten ebenfalls die gleiche Folge von Zeilenvertauschungen durchgeführt werden.

Möglich ist auch eine *Totalpivotsuche*. Hier wird eine Umnummerierung der Spalten in Betracht gezogen, was einer Umnummerierung der Unbekannten entspricht. Das Pivot-Element wird bestimmt als betragsgrößtes Element aller noch in Frage kommender Matrixelemente:  $|a_{ij}| = \max_{kl} |a_{kl}|$ . Die Totalpivotwahl erhöht oft die Stabilität. Allerdings wird auch der Buchhaltungs-Aufwand deutlich höher. Aus diesem Grund wird in der Praxis fast immer die Spaltenpivotwahl verwendet.

- Dass die Pivotwahl nötig ist zeigt das folgende kleine Beispiel. Betrachtet wird das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0,005 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die exakte Lösung ist  $x_1 = \frac{5000}{9950} \approx 0,503 \dots$  und  $x_2 = \frac{4950}{9950} \approx 0,497 \dots$

Das Element  $a_{11}$  ist ungleich Null. Wenn es als Pivotelement verwendet wird, erhält man bei Verwendung von 2-stelliger Arithmetik das Ergebnis

$$\begin{pmatrix} 0,005 & 1 \\ 0 & -200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -99 \end{pmatrix}$$

und die Lösung  $x_2 = 0,5$ ,  $x_1 = 0$ . Werden die beiden Zeilen vertauscht, also Spaltenpivotwahl verwendet, erhält man das Ergebnis

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

und die Lösung  $x_2 = 0,5$ ,  $x_1 = 0,5$ . Im zweiten Fall ist die Genauigkeit deutlich besser.

- Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

soll mit einer LU-Zerlegung und Spaltenpivotwahl gelöst werden. Die ausgewählten Pivot-Elemente sind fett gedruckt. Unterhalb der Diagonale werden die Elemente der unteren Dreiecksmatrix  $L$  abgespeichert, auf der Diagonale und oberhalb stehen die Elemente der Matrix  $R$ . Die Diagonale von  $L$  wird nicht gespeichert, denn alle ihre Diagonalelemente sind 1.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{3} & 1 & 6 & 2 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 & \frac{17}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1 & \frac{10}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{3} & 1 & 6 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1 & \frac{10}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

Die berechnete  $LU$ -Zerlegung ist

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und die Lösung des linearen Gleichungssystems ist  $x_3 = -8$ ,  $x_2 = -7$ ,  $x_1 = 19$ . Merkt man sich die Permutation der Zeilen durch die Elementarmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

kann für jede weitere rechte Seite durch  $L\mathbf{u} = P\mathbf{b}$ ,  $R\mathbf{x} = \mathbf{u}$  die Lösung  $\mathbf{x}$  berechnet werden.

Die Spaltenpivotwahl setzt voraus, dass die Matrixelemente equilibriert sind. Darunter versteht man, dass die Größenordnung der Matrixelemente „ungefähr gleich“ ist. Das dürfen Sie allerdings in der Praxis nicht voraussetzen. Deshalb empfiehlt es sich, die Zeilen der Matrix so zu skalieren, dass das maximale Element immer 1 ist. Das entspricht dem Suchen der  $n$  Zeilenmaxima und Division der Zeile durch dieses Maximum.

Die Permutationsmatrix  $P$  kann in der Implementierung in einem Vektor gespeichert werden, in dem die Zeilenvertauschungen festgehalten werden und mit  $(1, 2, \dots, n)$  initialisiert wird. Im Beispiel oben wäre nach dem Durchlauf der Vektor mit  $(1, 3, 2)$  besetzt. Auch die Skalierung kann effizient implementiert werden, indem die Zeilenmaxima berechnet werden und bei der Maximumbestimmung miteinbezogen werden. Durch diese *Scheinskalierung* wird sichergestellt, dass die Größenordnungen für die Pivotwahl stimmen ohne unnötige Gleitpunktoperationen vor der Elimination durchzuführen. Der folgende Algorithmus überschreibt die Matrixelemente der Originalmatrix. Ausgabewerte dieses Algorithmus sind die Matrix  $A$ , auf der jetzt  $L$  und  $U$  stehen, und die Permutationsmatrix  $P$ .

#### **$LU$ -Zerlegung mit Scheinskalierung und Spaltenpivotwahl**

Schritt 1: Initialisieren Sie die Permutationsmatrix  $\mathbf{p}$  mit  $p_i = i$ .

Schritt 2: Berechnen Sie die Zeilenlängen  $\sum_{j=1}^n |a_{ij}|$  und speichern Sie die Kehrwerte im Vektor  $\mathbf{d}$ . Setzen Sie  $j = 1$ .

Schritt 3: Bestimmen Sie das Pivotelement als  $|a_{i_0j}| = \max_i d_i |a_{ij}|$ ,  $i = j, \dots, n$ ; falls  $|a_{i_0i_0}| \leq \epsilon_M$  ist, brechen Sie die Zerlegung ab; die Matrix  $A$  ist numerisch singulär.

Speichern Sie die Zeilenvertauschung in  $\mathbf{p}$ :  $p_j = i_0$ ,  $p_{i_0} = j$ . Überschreiben Sie für alle  $i = j + 1, \dots, n$  die Elemente  $a_{ij}$  mit  $\frac{a_{ij}}{a_{p_j p_j}}$ .

Für alle  $k = j + 1, \dots, n$  ersetzen Sie  $a_{ik}$  durch  $a_{ik} - \frac{a_{ip_j}}{a_{p_j p_j}} a_{p_j k}$ .

Schritt 4: Erhöhen Sie  $j$  um 1 und wiederholen Sie Schritt 3, bis  $j = n - 1$ .

Die numerische Lösung von linearen Gleichungssystemen zählt zu den Aufgaben auf einem Computer, die sehr häufig durchgeführt werden; es gibt Schätzungen,

die von mehreren Millionen Gleichungssystemen pro Tag ausgehen. Neben der Möglichkeit, die beschriebenen Verfahren selbst zu implementieren, was Ihnen als Übung ans Herz gelegt wird, besteht natürlich die Möglichkeit, vorhandene Software zu verwenden. Dafür gibt es eine hervorragende Freeware-Lösung, die LAPACK, von der inzwischen auch eine C++-Version existiert. Mehr Informationen zu diesem Paket finden Sie unter der URL <http://www.netlib.org/lapack>. Eine weitere Quelle für Implementierungen nicht nur zur Lösung linearer Gleichungssysteme ist [PFTV93].

## 5.4 Determinanten

Matrizen können als eine Verallgemeinerung des Zahlenbegriffs angesehen werden. Wir führen jetzt eine Funktion ein, die jeder quadratischen Matrix  $A$  eine reelle Zahl zuordnet, die so genannte *Determinantenfunktion*. Dazu untersuchen wir zuerst Determinanten einer  $2 \times 2$ -Matrix und formulieren ihre Eigenschaften. Für allgemeine quadratische Matrizen werden diese Eigenschaften abschließend ohne Beweis übertragen.

**Definition 5.5** Die  $2 \times 2$ -Determinante einer  $2 \times 2$ -Matrix  $A$  ist

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

□ Es ist  $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 5 \cdot (-2) = 22$ .

**Satz 5.10** Für eine  $2 \times 2$ -Determinante gilt:

- $\det(A) = \det(A^T)$ .
- Durch Vertauschen der beiden Zeilen (oder Spalten) der Matrix ändert die Determinante ihr Vorzeichen.
- Werden die Elemente einer beliebigen Zeile (oder Spalte) einer  $2 \times 2$ -Matrix mit  $\lambda \in \mathbb{R}$  multipliziert, dann multipliziert sich ihre Determinante mit  $\lambda$ .
- Für die Matrix  $B$ , die aus  $A$  durch Addition eines Vielfachen einer Zeile oder Spalte zu einer anderen hervorgeht, gilt  $\det(B) = \det(A)$ .

**Beweis:**

Die Behauptung über die Determinante der Transponierten folgt aus  $\det(A^T) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \det(A)$ . Aus dieser Regel kann man schließen, dass alle Aussagen, die für Zeilen gelten, auch für Spalten richtig sind. Durch Vertauschen der Zeilen folgt

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{11} & a_{21} \end{vmatrix} = -\det(A).$$

Wird die erste Zeile mit  $\lambda$  multipliziert, dann gilt  $\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda \det(A)$ .

Das Ergebnis der Addition des Vielfachen der zweiten zur ersten Zeile ergibt

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{21} & a_{12} + \lambda a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= (a_{11} + \lambda a_{21})a_{22} - (a_{12} + \lambda a_{22})a_{21} \\ &= \det(A) + \lambda(a_{21}a_{22} - a_{22}a_{21}) = \det(A). \end{aligned}$$

Auch die Addition der ersten zur zweiten Zeile kann analog nachgerechnet werden. ■

**Satz 5.11** Eine  $2 \times 2$ -Determinante ist null, wenn sie mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

- Alle Elemente einer Zeile (oder Spalte) sind 0.
- Beide Zeilen (oder Spalten) stimmen überein.
- Die Zeilen (oder Spalten) sind zueinander proportional, durch Addition eines geeigneten Vielfachen der einen Zeile (oder Spalte) zur anderen kann eine Nullzeile (oder Nullspalte) erzeugt werden.

**Beweis:**

Angenommen, die zweite Zeile ist das  $\lambda$ -fache der ersten Zeile, also  $a_{21} = \lambda a_{11}$  und  $a_{22} = \lambda a_{12}$ , dann gilt  $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = 0$  und damit die Behauptung. Auch die beiden anderen Punkte sind durch Nachrechnen zu beweisen. ■

**Satz 5.12** Für zwei  $2 \times 2$ -Matrizen  $A$  und  $B$  gilt immer  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ . Die Determinante einer oberen  $2 \times 2$ -Dreiecksmatrix  $A$  hat den Wert  $\det(A) = a_{11}a_{22}$ .

Auch dieser Satz kann durch Nachrechnen bewiesen werden. Viel wichtiger ist, dass man damit eine Aussage über die Determinante der inversen Matrix aufstellen kann.

**Satz 5.13** Für eine invertierbare Matrix  $A$  ist  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ .

**Beweis:**

Aus  $A^{-1}A = I$  und  $\det(I) = 1$  folgt  $\det(A^{-1}A) = \det(A^{-1})\det(A) = 1$ . ■

**Definition 5.6** Die Determinante einer  $3 \times 3$ -Matrix  $A$  ist die reelle Zahl

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Diese Definition ist gut mit der *Regel von Sarrus* zu merken, die die Formel als Produkte von Haupt- und Nebendiagonalelementen darstellt, wenn man die Matrix geschickt erweitert:

Die Spalten 1 und 2 werden nochmals rechts neben die Determinante gesetzt, die positiven und negativen Summanden in der Formel für die  $3 \times 3$ -Determinante

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & - & - & - \\
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\
 & & & + & + & +
 \end{array}$$

entsprechen den diesbezüglich gekennzeichneten Diagonalen. An dieser Stelle wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass diese Regel ausschließlich für  $3 \times 3$ -Determinanten gültig ist!

□ Mit der Sarrus'schen Regel ergibt sich die Determinante  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$ .

Bevor der Schritt auf beliebige  $n \times n$ -Determinanten gegangen wird, wird eine Berechnungsformel für  $3 \times 3$ -Matrizen aufgestellt, die im Gegensatz zur Sarrus'schen Regel auch für beliebige Matrizen formuliert werden kann.

**Definition 5.7** Die aus einer  $3 \times 3$ -Determinante  $D$  durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte entstehende  $2 \times 2$ -Determinante heißt *Unterdeterminante*  $D_{ij}$  von  $D$ . Der Ausdruck  $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$  wird *algebraisches Komplement des Elements  $a_{ij}$  in der Determinante  $D$*  genannt.

In einer  $3 \times 3$ -Determinante gibt es insgesamt 9 Möglichkeiten, eine Unterdeterminante zu bilden. Die Vorzeichen der algebraischen Komplemente können in einem Schachbrett dargestellt werden:

+	-	+
-	+	-
+	-	+

Mit Hilfe der algebraischen Komplemente lässt sich eine  $3 \times 3$ -Determinante durch  $2 \times 2$ -Unterdeterminanten berechnen. Dazu stellt man die ursprüngliche Berechnungsformel um:

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\
 &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\
 &= a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} + a_{13}D_{13} \\
 &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.
 \end{aligned}$$

Die eben durchgeführte Umstellung entspricht einer Entwicklung nach der ersten Zeile. Auch die Entwicklung nach der ersten, zweiten oder dritten Spalte ist möglich. Die Entwicklung nach der ersten Spalte ergibt beispielsweise  $\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$ .

Die allgemeine Aussage für  $n \times n$ -Matrizen ist nach dem französischen Mathematiker Laplace benannt. Um die Formulierung einfacher zu machen, wird vereinbart, dass eine  $1 \times 1$ -Determinante als Zahl zu interpretieren ist.

**Satz 5.14 (Laplace'scher Entwicklungssatz)** Eine  $n \times n$ -Determinante wird berechnet, indem man die Elemente einer Zeile (oder Spalte) mit ihren algebraischen Komplementen

menten multipliziert und diese Produkte addiert. Die Entwicklung nach der  $i$ -ten Zeile ist

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

die Entwicklung nach der  $j$ -ten Spalte

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Der Wert einer Determinante ist unabhängig von der Zeile oder Spalte, nach der man entwickelt. Für die praktische Berechnung wählt man die Zeile oder Spalte aus, die die meisten Nullen besitzt, um den Rechenaufwand zu minimieren. Die Vorzeichen der algebraischen Komplemente können wieder mit einer Schachbrettregel analog zum  $3 \times 3$ -Fall bestimmt werden.

Alle Rechenregeln für Determinanten, die bereits für  $2 \times 2$  bewiesen sind, gelten auch für beliebige Determinanten.

**Satz 5.15** Für  $n \times n$ -Determinanten gelten die folgenden Regeln:

- Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn Zeilen oder Spalten miteinander vertauscht werden.
- Vertauscht man zwei Zeilen (oder Spalten), dann ändert sich das Vorzeichen der Determinante.
- Multipliziert man die Elemente einer beliebigen Zeile (oder Spalte) mit einer reellen Zahl  $\lambda$ , dann wird die Determinante mit  $\lambda$  multipliziert.
- Eine Determinante wird mit einer reellen Zahl  $\lambda$  multipliziert, indem man die Elemente einer beliebigen Zeile (oder Spalte) mit  $\lambda$  multipliziert.
- Besitzen die Elemente einer Zeile (oder Spalte) einen gemeinsamen Faktor  $\lambda$ , dann darf man diesen vor die Determinante ziehen.
- Eine  $n \times n$ -Determinante ist gleich Null, wenn sie mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt:
  - Alle Elemente einer Zeile (oder Spalte) sind Null; oder
  - beide Zeilen (oder Spalten) stimmen überein; oder
  - zwei Zeilen (oder Spalten) sind zueinander proportional.
- Der Wert einer Determinanten ändert sich nicht, wenn man zu einer Zeile (oder Spalte) ein beliebiges Vielfaches einer anderen Zeile (oder Spalte) addiert.
- Für zwei  $n \times n$ -Matrizen  $A$  und  $B$  gilt immer  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ .
- Die Determinante einer  $n \times n$  oberen oder unteren Dreiecksmatrix  $A$  ist das Produkt der Hauptdiagonalelemente,  $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$ .

- Für eine invertierbare  $n \times n$ -Matrix  $A$  ist  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ ; für die Einheitsmatrix  $I$  gilt immer  $\det(I) = 1$ .

In der letzten Regel sind invertierbare Matrizen aufgetreten. Dabei muss vorausgesetzt werden, dass die Determinante invertierbarer Matrizen nie Null werden kann. Bevor das sichergestellt wird, betrachten wir zuerst einmal die Determinanten von Elementarmatrizen, die bei der Reduktion einer Matrix auf Zeilenstufenform auftreten. Der Beweis der Aussage ist eine direkte Konsequenz der Regeln für  $n \times n$ -Determinanten.

**Satz 5.16** Ist  $E$  eine Elementarmatrix, gilt:

- Entsteht  $E$  aus  $I$  durch Multiplikation einer Zeile mit  $\lambda$ , dann ist  $\det(E) = \lambda$ .
- Entsteht  $E$  aus  $I$  durch Vertauschen zweier Zeilen, dann ist  $\det(E) = -1$ .
- Entsteht  $E$  durch Addition eines Vielfachen einer Zeile von  $I$  zu einer anderen, dann ist  $\det(E) = 1$ .

Die Determinanten von Elementarmatrizen, die bei der Gauß-Elimination auftreten, sind nie Null, denn die Multiplikation einer Zeile mit  $\lambda = 0$  ist sicher keine sinnvolle Operation.

**Satz 5.17** Eine  $n \times n$ -Matrix  $A$  ist genau dann invertierbar, wenn  $\det(A) \neq 0$ .

**Beweis:**

$U$  soll die durch Gauß-Elimination gewonnene Zeilenstufenform der Matrix  $A$  bezeichnen. In einem ersten Schritt wird nachgewiesen, dass  $\det(A) = 0$  äquivalent zu  $\det(U) = 0$  ist. Sind  $E_1, \dots, E_r$  die Elementarmatrizen, die  $A$  in  $U$  überführen, dann ist  $U = E_1 \cdots E_r A$ . Nach der Formel für die Determinante eines Matrixprodukts ist  $\det(U) = \det(E_1) \cdots \det(E_r) \det(A)$ . Die Determinanten der Elementarmatrizen sind alle ungleich Null, womit die Äquivalenz bewiesen ist.

Bei der Betrachtung der Gauß-Elimination wurde bewiesen, dass invertierbare Matrizen  $A$  in die Einheitsmatrix überführt werden können. Es ist  $\det(U) = 1 \neq 0$  und damit auch  $\det(A) \neq 0$ . Umgekehrt folgt aus  $\det(A) \neq 0$  sofort  $\det(U) \neq 0$ .  $U$  enthält keine Nullzeile und ist somit invertierbar. Alle Elementarmatrizen sind invertierbar, und  $A$  ist als Produkt von invertierbaren Matrizen invertierbar. ■

## 5.5 Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix

Gegenstand dieses Abschnitts sind spezielle lineare Gleichungssysteme. In einer kleinen Stadt in Deutschland haben die Einzelhändler der Innenstadt festgestellt, dass 80% ihrer Kunden auch nächstes Jahr wieder in der City einkaufen, 20% wandern zu einem Factory Outlet auf der grünen Wiese ab. Von den Kunden des Outlets kaufen im nächsten Jahr 10% in der City ein, 90% bleiben der grünen Wiese treu. Ist  $c_n$  die Zahl der Citykunden im Jahr  $n$  und steht  $o_n$  für die Outletkunden,

dann kann dieses Verhalten als Matrix-Iteration

$$\begin{pmatrix} c_{n+1} \\ o_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n \\ o_n \end{pmatrix}$$

dargestellt werden. Die Einzelhändler suchen nach einem stationären Zustand, für den sich die Kundenzahlen nicht verändern. Als lineares Gleichungssystem geschrieben, wird nach nicht trivialen Lösungen von

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

gesucht. In vielen Anwendungen treten lineare Gleichungssysteme der Form  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  mit einer reellen Zahl  $\lambda$  und der Unbekannten  $\mathbf{x}$  auf. Tatsächlich ist dies ein homogenes lineares Gleichungssystem, das sich in  $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  umformen lässt.

**Definition 5.8** Reelle Zahlen  $\lambda$ , für die das homogene lineare Gleichungssystem mit der quadratischen Koeffizientenmatrix  $A - \lambda I$  nicht triviale Lösungen besitzt, heißen charakteristische Werte oder Eigenwerte von  $A$ . Ist  $\lambda$  ein Eigenwert von  $A$ , dann werden die nicht trivialen Lösungen des Gleichungssystems  $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  Eigenvektoren von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$  genannt.

Welche Werte von  $\lambda$  zu Eigenwerten führen, diese Frage kann mit Hilfe der Determinante leicht beantwortet werden.

**Satz 5.18** Das lineare Gleichungssystem  $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  hat nicht triviale Lösungen genau dann, wenn  $\lambda$  eine Lösung der charakteristischen Gleichung  $\det(A - \lambda I) = 0$  ist.

**Beweis:**

Der Beweis folgt aus der Tatsache, dass die Invertierbarkeit einer Matrix äquivalent zu  $\det(A) \neq 0$  ist. Homogene lineare Gleichungssysteme haben nur dann nicht triviale Lösungen, wenn ihre Koeffizientenmatrix singular ist. ■

- Die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$  sollen bestimmt werden. Die charakteristische Gleichung lautet

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 12 = 2 - 3\lambda + \lambda^2 - 12 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0. \end{aligned}$$

Das ist eine quadratische Gleichung für  $\lambda$  mit den Lösungen  $\lambda_1 = -2$  und  $\lambda_2 = 5$ . Werden beide Eigenwerte sukzessive in die Koeffizientenmatrix eingesetzt, ergeben sich die Eigenvektoren von  $A$  als Lösungen der homogenen Gleichungssysteme.

- Für das Einzelhandelsproblem wird nach Eigenwerten der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix}$$

gesucht. Die Eigenwerte sind die Lösungen der quadratischen Gleichung  $\lambda^2 - 1,7\lambda + 0,7 = (\lambda - 1)(\lambda - 0,7) = 0$ , als Nullstellen erhält man  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,7$ . Das homogene Gleichungssystem  $(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  hat die Lösungen  $\mathbf{x} = \frac{1}{3}(1, 2)$ . In stationärem Zustand kaufen 33 % in der City und 66 % im Outlet ein.

Die Beispiele zeigen, dass sich für die Eigenwerte einer Matrix eine polynomiale Gleichung ergibt, der Ausdruck  $\det(A - \lambda I_n)$  heißt *charakteristisches Polynom*.

**Satz 5.19** *Das charakteristische Polynom einer  $n \times n$ -Matrix  $A$  hat die Form  $(-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0$ .*

**Beweis:**

Der Beweis kann durch Induktion über  $n$  geführt werden, die Basis ist  $n = 2$ :

$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ . Für den Induktionsschritt entwickeln Sie nach der ersten Zeile der Matrix und erhalten die gewünschte Darstellung. ■

Wenn Sie Eigenwerte einer Matrix  $A$  gefunden haben, kennen Sie auch die Eigenwerte der Potenzen  $A^n$ . Ist  $\lambda$  ein Eigenwert der Matrix  $A$  mit Eigenvektor  $\mathbf{x}$ , dann ist  $A^2\mathbf{x} = A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x} = \lambda(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^2\mathbf{x}$ .

**Satz 5.20** *Ist  $\lambda$  ein Eigenwert der Matrix  $A$  mit Eigenvektor  $\mathbf{x}$  und  $k \in \mathbb{N}$ , dann ist  $\lambda^k$  ein Eigenwert der Matrix  $A^k$  mit Eigenvektor  $\mathbf{x}$ .*

□ Die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$  hatte die Eigenwerte  $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 5$ .  $\lambda_1 = 4$  und  $\lambda_2 = 25$  sind dann Eigenwerte von  $A^2$ .

**Satz 5.21** *Eine  $n \times n$ -Matrix  $A$  ist genau dann invertierbar, wenn  $\lambda = 0$  kein Eigenwert von  $A$  ist.*

**Beweis:**

$\lambda = 0$  ist genau dann eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms, wenn der konstante Term in  $(-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0$  verschwindet. Es ist zu zeigen, dass die Invertierbarkeit von  $A$  äquivalent zu  $a_0 = 0$  ist. Für  $\lambda = 0$  folgt  $\det(A) = a_0$ , und daraus die Äquivalenz. ■

**Definition 5.9** *Zwei  $n \times n$ -Matrizen  $A$  und  $B$  werden ähnlich genannt, wenn es eine invertierbare  $n \times n$ -Matrix  $T$  gibt mit  $B = T^{-1}AT$ .*

Die Ähnlichkeit von Matrizen ist eine Äquivalenzrelation, denn  $I_n$  ist invertierbar, damit ist  $A = I_n^{-1}AI_n = A$ . Aus  $B = T^{-1}AT$  folgt  $TBT^{-1} = A$  und die Symmetrie. Die Transitivität folgt aus  $C = S^{-1}BS = S^{-1}T^{-1}ATS$  und  $S^{-1}T^{-1} = (TS)^{-1}$ .

**Satz 5.22** *Sind zwei Matrizen  $A$  und  $B$  ähnlich, dann gilt  $\det(A) = \det(B)$ .*

**Beweis:**

Die Behauptung folgt aus  $\det(B) = \det(T^{-1}AT) = \det(A)$ . ■

Es stellt sich die Frage, ob in jeder Äquivalenzklasse, die durch den Ähnlichkeitsbegriff gegeben ist, eine Diagonalmatrix zu finden ist. oder, mit anderen Worten, ob jede  $n \times n$ -Matrix  $A$  zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist. Die Antwort ist nein, wie das Gegenbeispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zeigt. Wenn man annimmt, dass es eine invertierbare  $n \times n$ -Matrix  $T$  und eine Diagonalmatrix  $D$  gibt mit  $D = T^{-1}AT$ , kann man versuchen, die Elemente der Matrix  $T$  und die Diagonalelemente von  $D$  zu bestimmen. Die Matrix  $A$  hat die Determinante  $d_1 d_2 = 1$ . Aus  $AT = TD$  folgt komponentenweise

$$t_{21} = (d_1 - 1)t_{11}, \quad t_{22} = (d_2 - 1)t_{12} = (1 - d_1)t_{21}, \quad 0 = (1 - d_2)t_{22}$$

Im Fall  $d_1 = d_2 = 1$  folgt genauso  $t_{21} = t_{22} = 0$  wie im Fall  $d_1, d_2 \neq 0$ . Dann ist  $\det(T) = 0$  und  $T$  ist nicht invertierbar.

Die Form der Gleichungen im Gegenbeispiel hängen mit Eigenwerten zusammen. Um bei  $2 \times 2$ -Matrizen zu bleiben, wird die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix}$$

untersucht. Ist  $A$  zu einer Diagonalmatrix  $D = \text{diag}(d_1, d_2)$  ähnlich, muss die Gleichung  $AT = TD$  erfüllt sein mit einer invertierbaren Matrix  $T$ . Diese Gleichung muss wieder komponentenweise erfüllt sein:

$$\begin{pmatrix} 0,8-d_1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9-d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad \begin{pmatrix} 0,8-d_2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9-d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{12} \\ t_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Diese Gleichungssysteme besitzen genau dann nicht triviale Lösungen, wenn  $d_1$  und  $d_2$  Eigenwerte von  $A$  sind und die zugehörigen Eigenvektoren eine invertierbare Matrix  $T$  bilden. In diesem Fall ist  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,7$  und die Matrix  $T$  ist gegeben durch

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Inverse ist  $T^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ . Damit kann die Kundenverteilung im Jahr  $n$  ausgehend von den Startwerten  $c_0$  und  $o_0$  durch

$$\begin{pmatrix} c_n \\ o_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ 1-c_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (c_0 - \frac{1}{3})(0,7)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

berechnet werden.

## 5.6 Aufgaben

- Bestimmen Sie in der erweiterten Koeffizientenmatrix  $\begin{pmatrix} a & b & c & -2 \\ c & a & b & 8 \\ b & c & a & 0 \end{pmatrix}$  die Koeffizienten  $a, b$  und  $c$  so, dass das zugehörige Gleichungssystem genau die Lösung  $x_1 = 1, x_2 = -1$  und  $x_3 = 2$  besitzt!

2. Bestimmen Sie die Koeffizienten des Polynoms  $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$  so, dass  $p(-1) = 0$ ,  $p(1) = 2$ ,  $p(2) = 3$ ,  $p(3) = 12$  erfüllt sind!
3. Bestimmen Sie die Elementarmatrizen  $E_1, E_2, E_3$  und  $E_4$  mit  $E_1A = B$ ,  $E_2B = A$ ,  $E_3A = C$ ,  $E_4C = A$  für die Matrizen  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 2 & -7 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}$ .
4. Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  mit Hilfe der Gauß-Elimination für die erweiterten Koeffizientenmatrizen  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 9 & -11 & 10 & 4 & 9 \\ 2 & -2 & 2 & 1 & 3 \\ 7 & -16 & 11 & 2 & -7 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ .
5. Bestimmen Sie die Inversen der Matrizen  $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$  und  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ !
6. Schreiben Sie eine Funktion in der Programmiersprache Ihrer Wahl, die die Rückwärtssubstitution für eine obere Dreiecks-Matrix  $A$  und eine rechte Seite  $\mathbf{b}$  durchführt. Testen Sie diese Funktion an selbst gewählten linearen Gleichungssystemen!
7. Schreiben Sie eine Funktion in der Programmiersprache Ihrer Wahl, die die Gauß-Elimination für eine Matrix  $A$  und eine rechte Seite  $\mathbf{b}$  durchführt. Testen Sie diese Funktion an selbst gewählten linearen Gleichungssystemen und mit der Funktion aus Aufgabe 6!
8. Die *Hilbert-Matrix* ist eine quadratische Matrix mit  $h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ . Invertieren Sie  $H_n$  mit Hilfe der Gauß-Elimination und Rücksubstitution aus Aufgabe 7. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der exakten Inversen  $H_n^{-1}$ , die durch

$$h_{ij}^{-1} = (-1)^{i+j}(i+j-1) \binom{n+i-j}{n-j} \binom{n+j-1}{n-i} \binom{i+j-2}{i+1}^2.$$

gegeben ist!

9. In vielen Anwendungen tauchen lineare Gleichungssysteme mit *tridiagonaler* Koeffizientenmatrix auf. Für  $n = 5$  hat die tridiagonale Koeffizientenmatrix die Form

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & a_4 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & a_5 \end{pmatrix}.$$

Wenn die Gauß-Elimination für eine solche Koeffizientenmatrix ohne Zeilenvertauschung durchführbar ist, dann muss eine *LU-Zerlegung* existieren, bei der  $L$  eine bidiagonale untere und  $U$  eine bidiagonale obere Dreiecksmatrix ist. Stellen Sie einen Algorithmus auf, der für eine gegebene  $n \times n$ -Tridiagonalmatrix diese *LU-Zerlegung* berechnet wenn keine Zeilenvertauschungen nötig sind. Implementieren Sie den Algorithmus in der Program-

miersprache Ihrer Wahl und testen Sie die Funktion an selbst gewählten Beispielen!

10. Implementieren Sie die  $LU$ -Zerlegung mit Scheinskalierung und Spaltenpivotwahl in der Programmiersprache Ihrer Wahl. Lösen Sie damit das lineare Gleichungssystem mit der  $20 \times 20$ -Matrix  $A$  mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & i + j = 21, \\ \cos(0,1 \cdot i + 0,05 \cdot j + 0,04 \cdot i \cdot j), & \text{sonst} \end{cases}$$

und der rechten Seite  $b_i = 1, 1 \leq i \leq 20$ .

11. Invertieren Sie mit der  $LU$ -Zerlegung mit Scheinskalierung und Spaltenpivotwahl die Hilbertmatrix für verschiedene Werte von  $n$ . Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den Ergebnissen aus Aufgabe 8!
12. Beweisen Sie durch Nachrechnen, dass alle für  $2 \times 2$ -Determinanten aufgestellten Regeln auch für den Fall  $3 \times 3$  gelten!

13. Berechnen Sie  $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ ,  $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 12 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$  und  $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ .

14. Berechnen Sie die Determinante von  $A^{-1}$  für  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ .

15. Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  und  $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

16. Bestimmen Sie die Eigenwerte von  $A^{25}$  für  $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

17. Beweisen Sie, dass eine  $2 \times 2$ -Matrix  $A$  genau dann zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist, wenn  $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} > 0$  erfüllt ist.

18. Berechnen sie auf der Basis der  $LU$ -Zerlegung der Hilbertmatrix die Determinante  $\det(H_n)$  und vergleichen Sie die Werte mit dem exakten Wert

$$\det(H_n) = \frac{(\prod_{i=2}^{n-1} i!)^4}{\prod_{i=2}^{2n-1} i!} \approx 2^{-2n^2}.$$